بررسی روش‌های اثبات احتمالی فرمول استرلینگ با استفاده ازتوزیع گاما و نمایی

نویسنده **نورالدین فخری**
پوهنحی تعلیم وتربیه، پوهنتون بخشان، فیض‌آباد، افغانستان
نشان برقی Nooruddinfakhri۹۵@gmail.com
نشانه ارکاید ۰۰۰۹-۰۰۰۱-۷۳۳X

چکیده

از زمانی که بشر به‌پیش‌رفت و انکشاف علمی روی آورد، محاسبات عددی یکی از روش‌های جالب و مورد توجه بوده و کار های جالب درین عرصه صورت گرفته است و از آن‌جمله هم تقریب فکتوریل عدد های بزرگ است، که برای محاسبات آن‌ها از تقریب فورمول استرلینگ کار گرفته می‌شود و این فرمول به‌روش‌های مختلف ثبوت شده است. توزیع گاما و نمایی یکی از توزیعات مهم و پرکاربرد در بخش احتمال و احصائیه است، کار بردهای جالب و قابل توجه‌ی این دو توزیع در آمارگیری تحقیقی، سنجش و استنباط داده‌های آماری قابل توجه است و لی ما در این‌جا برای اثبات فورمول استرلینک از آن‌ها استفاده می کنیم. هدف ما در این مقاله بررسی و بیان روش‌های تقریب فورمول استرلینگ با استفاده از توزیع گاما و نمایی است که یکی از شناخته شده‌ترین فرمول‌ها برای محاسبهٔ تقریبی $n!$ (زمانی که n عدد بزرگ است)، فرمول استرلینگ است. اثبات‌های گوناگون برای این فرمول وجود دارد که بعضی از آن‌ها برپایهٔ قوانین احتمال استوار هستند. در این نوشتار با اثبات‌هایی احتمالی براساس توزیع گاما و نمایی فرمول استرلینگ آشنا می‌شویم.

کلیدواژه‌ها: فرمول استرلینگ، اثبات احتمالی، توزیع گاما، توزیع نمایی.

Investigating Possible Proof Methods of Stirling's Formula Using Gamma and Exponential Distribution

Author **Nooruddin Fakhri**
Education Faculty of Badakhshan university
E-Mail Nooruddinfakhri۹۵@gmail.com
Orcid https://orcid.org/۰۰۰۹-۰۰۰۱-۷۳۳X

Abstract

Since the human progress and scientific development, numerical calculations have been one of the most interesting and interesting methods and interesting works have been done in this field, and one of them is the factorial approximation of large numbers, which uses Stirling's formula approximation for their calculations, and this formula has been proven in different ways. Gamma and Exponential distribution are one of the most important and widely used distributions in the field of probability and statistics, the interesting and significant uses of these two distributions in research statistics, measurement and inference of statistical data are significant, and this is the place to prove Sterling's formula. We use them. Our purpose in this article is to review and describe methods of approximating Stirling's formula using gamma and exponential distribution, which is one of the most well-known formulas for approximate calculation of n! (when n is a large number), Stirling's formula. There are various proofs for this formula, some of which are based on the laws of probability. In this article, we will get acquainted with possible proofs based on Gamma distribution and Stirling's Exponential formula.

Keywords: sterling formula, possible confirmation, gamma distribution, Exponential distribution.

مقدمه

اهمیت فرمول استرلنگ در محاسبه‌ی فکتوریل اعداد بزرگ است، محاسبه‌ی n! برای n های بزرگ کاری است دشوار و بعضاً هم ناممکن، اما روش‌های تقریبی متعددی برای تقریب زنی فکتوریل‌های بزرگ وجود دارند. یک روش تقریبی موسوم به‌فرمول استرلینگ(یا تقریب استرلینگ) شناخته شده‌تر از بقیهٔ روش‌ها است. فرمول استرلینگ بیان می‌کند که؛

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}} = 1 + o(1), \quad as\, n \to \infty, \qquad (1)$$

یا به‌عبارت دیگر:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}} = 1$$

ازاین‌رو برای n های بزرگ می‌توان از تقریب به‌صورت $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$ استفاده کرد. توجه داشته باشید که تقریب به‌صورت استرلینگ در حالت عمومی‌تر برحسب تابع گاما برای هر عدد حقیق α به‌صورت $\Gamma(\alpha+1) \approx (\alpha/e)^a\sqrt{2\pi a}$ تعریف می‌شود.

هرچند فرمول (۱) با عنوان فرمول استرلینگ یا تقریب استرلینگ شناخته می‌شود، اما باید درنظر داشت که فرمول استرلینگ نخستین‌بار توسط آبراهام دموآور[۱] (۱٦٥٤-۱٦٦٧)یکی از ریاضی دانان فرانسوی اثبات شدکه این اثبات‌هارا (داتکا،۱۹۹۱:ص۷) و (دودلی، ۲۰۰٤:ص١٦) توضیح داده‌اند. دموآور در ابتدا از یک فرمول استفاده کرد که اختلاف چشم‌گیری بافرمول امروزی داشت. در سال ۱۷۳۰ ریاضی‌دان بریتانیایی، جیمز استرلینگ[۲] (۱٦۹۲-۱۷۷۰)، ثابت $\sqrt{2\pi}$ را در فرمول مورد ارزیابی قرار داد(استرلینگ، ۱۷۳۰). با مطلع شدن دموآور از ارزیابی این ثابت توسط استرلینگ در همان سال او توانست فرمول راکه امروزه با نام فرمول استرلینگ می‌شناسیم اثبات کند.

امروزه اثبات‌های زیادی برای تقریب فرمول استرلینگ وجود دارد وهم‌چنان نیز اثبات‌های جدیدی برای آن ارایه می‌شود. اثبات‌های زیبا از فرمول استرلینگ را (فرینزین، ۱۹۹٥:ص١٤) تحت عنوان(اثبات‌های مقدماتی از فرمول استرلینگ و (لیو، ۲۰۱٤:ص۲-٤) تحت عنوان(اثبات کوتاهی از فرمول استرلینگ)بررسی کرده‌اند. در این نوشتار به‌طور خاص ما با دو اثبات احتمالی برپایهٔ توزیع گاما از فرمول استرلینگ آشنا می‌شویم. لازم به‌ذکر است که اثبات های احتمالی براساس بعضی توزیع های دیگر برای فرمول استرلینگ وجود دارند.

[۱] Abraham de Moivre

[۲] James Stirling

مثلاً؛ یکی از ساده‌ترین این اثبات ها با استفاده ازتوزیع پواسن می‌باشد که (هوا،۱۹۸۸)در مقاله‌ای تحت عنوان(روش آماری اثبات فرمول استرلینگ) و(والش، ۱۹۹۵:ص٤-۷) در مقاله‌ای تحت عنوان(نتیجه فرمول استرلینگ در معادله‌ی پواسون و تابع احتمال نورمال) توضیح داده‌اند و البته (بهبودیان،۱۳۷۵:ص٦-۱۲) به‌شکل بهتری به‌معرفی آن پرداخته است.

بیان مسأله

فرمول استرلینگ، یکی از جمله فرمول‌های جالب و مسیر کوتاه برای تقریب نمودن برای فکتوریل‌های اعداد بزرگ است. فرمول استرلینگ به طریق های مختلف مانند؛ روش‌های آماری به وسیله معادله‌ی پواسون تقریب گردیده است. اما بالای روش اثبات احتمالی مخصوصاً به‌صورت توزیع گاما و نمایی اثبات نشده است، بناءً لازم دانسته می‌شود که این روش نیز تحت بررسی قرار گیرد.

سوالات تحقیق

آیا روش های دیگر برای اثبات فرمول استرلینگ و جود دارد یا خیر؟ آیا اثبات‌های احتمالی هم برای اثبات فرمول استرلینگ جواب‌گو هستند یاخیر؟ درین مقاله می‌خواهیم به‌پرسش‌های مطرح شده جواب دهیم و فرمول استرلینگ را به‌وسیله تابع توزیع گاما و تابع توزیع نمایی اثبات و به‌معرفی بگیریم.

اهداف تحقیق

هدف ما رسیدن به اثبات فرمول استرلینگ به‌وسیله تابع توزیع گاما و تابع توزیع نمایی است؛ اکثراً پژوهش‌گران دنبال راه‌های متعدد و کوتاه‌تر هستند، به‌همین خاطر توزیع گاما و توزیع نمای را برای اثبات فرمول استرلینگ انتخاب کردیم.

روش تحقیق

این تحقیق بر پایه‌ی مطالعه مقالات متعدد، که در سایت‌های معتبر بین المللی پیرامون فرمول استرلینگ نوشته و به‌نشر رسیده و کتاب‌های معتبر، که احتمالاً در دانشگاه‌های معتبر بین‌المللی تدریس می‌گردد استوار است، یعنی روش به‌کار رفته درین مقاله روش کتاب خانه‌ای است. در بخش مقدمه کارهای مرتبط و تحقیقات انجام شده به‌شکل مفصل توضیح داده شده است.

اهمیت تحقیق

خوانندگان محترم، با مطالعه این بخش میتوانند با ثبوت فرمول استرلینگ به‌روش توزیع گاما و توزیع نمایی آشناشوند، با مطالعه این مقاله فکتوریل‌های اعداد بزگ را محاسبه نموده می‌توانند، این پژوهش خوانندگان محترم را در قسمت ثبوت فرمول استرلنگ به‌طریقه توزیع احتمالی مخصوصاً توزیع گاما و نمایی آشنا می-کند.

یافته‌ها ونتایج

۱. اثبات‌های احتمالی از فرمول استرلینگ

در این قسمت ما به‌معرفی دو اثبات احتمالی از تقریب استرلینگ که با استفاده از توزیع گاما صورت می گیرد می‌پردازیم.

۱٫۲ اثبات احتمالی تقریب استرلینگ با استفاده از توزیع گاما

در قدم نخست لازم است تابع توزیع گاما را معرفی نمایم تا پیش‌نیازی باشد برای فهم ودرک بهتر موضوع و خواننده عزیز به‌ابهام واقع نشود.

تابع توزیع گاما

متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما است اگر دارای تابع احتمال به‌شکل زیر باشد؛

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}\dfrac{(\lambda x)^{r-1}}{\Gamma(r)} & , \quad r>0\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

در این‌جا اثبات احتمالی از فرمول استرلینگ را که با استفاده از توزیع گاما ارایه می‌شود معرفی می کنیم.

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع گاما $Gam(\alpha,1)$ باشند. ازاین رو؛ اگر درنظر بگیریم $Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ آنگاه Y_n دارای توزیع گاما $Gam(n\alpha,1)$ می‌باشد و تابع کثافت آن به‌صورت زیر است:

$$f_{Y_n}(y)=\frac{1}{\Gamma(n\alpha)}e^{-y}y^{n\alpha-1} \quad , \quad y>0. \qquad (2)$$

باید خاطرنشان کرد که $\frac{1}{\Gamma(n\alpha)}e^{-y}y^{n\alpha-1}\Delta y$ به ازای مقادیرکوچک و نامنفی Δy تقریبی از $P(y<Y_n<y+\Delta y)$ است.(بلتزاشتاین، ۲۰۲۳: ص ۳۷٤-۳۸۱)

به‌عبارت بهتر به‌ازای مقادیر کوچک و ثابت $\delta>0$ داریم:

$$\frac{2\delta}{\Gamma(n\alpha)}e^{-y}y^{n\alpha-1}\approx P(-\delta<Y_n-n\alpha<\delta). \qquad (3)$$

برای n های بزرگ تقریب (۳) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{2\delta}{\Gamma(n\alpha)}e^{-y}y^{n\alpha-1}\approx P(\frac{-\delta}{\sqrt{2\alpha}}<\frac{Y_n-n\alpha}{\sqrt{2\alpha}}<\frac{\delta}{\sqrt{2\alpha}}). \qquad (4)$$

حال با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی در رابطهٔ (٤) داریم:

$$\frac{2\delta}{\Gamma(n\alpha)}e^{-y}y^{n\alpha-1}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\delta}{\sqrt{2\alpha}},$$

که معادل است با

$$\Gamma(n\alpha)\approx(\frac{n\alpha}{e})^{n\alpha}\sqrt{2\pi n\alpha},\ \ \alpha>0 \qquad (5)$$

و این همان تقریب استرلینگ برای تابع گاما است.

با قرار دادن $\alpha=k+\frac{1}{n}$ در رابطهٔ (٥)، خواهیم داشت:

$$(nk)!\approx(\frac{nk}{e})^{nk}\sqrt{2\pi nk}$$

که همان تقریب استرلینگ برای عدد صحیح nk است.

٢/٢ اثبات احتمالی تقریب استرلینگ با استفاده از توزیع نمایی

تابع توزیع نمایی

متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی است اگر دارای تابع کثافت احتمال به‌شکل زیر باشد؛

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & ,\quad x>0\\ 0 & \quad Otherwise\end{cases}$$

دراین‌جا یک اثبات احتمالی دیگری از فرمول استرلینگ که به‌وسیله (آر خان، ٢٠١٢: ص٤-١٠)در مقاله‌ای تحت عنوان(اثبات احتمالی فرمول استرلینگ) ارائه شده است معرفی می‌شود. ابتدا به‌دو قضیهٔ زیر توجه کنید.

قضیه‌ی ١ . فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ متغیرهای تصادفی مستقل وهم توزیع باشند به‌طوری که $E\left(X_1\right)=0$ و $E\left(X_1\right)=0$ اگر $S_n=X_1+X_2+\ldots+X_n$، آن‌گاه:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\le x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

قضیهٔ ٢ . فرض کنید $\{X_n, n\ge1\}$ یک ترادف از متغیر های تصادفی باشد به‌طوری‌که X_n در توزیع به X متقارب باشد و $\limsup_{n\to\infty}E\left(X_n^2\right)<\infty$ آن‌گاه؛

$$\lim_{n\to\infty}E\left|X\right|^r=\left|X\right|^r,\ \ 0\le r<2.$$

Pamir Academic & Research Journal - مجله علمی تحقیقی پامیر - دپامیر علمی څېړنیزه مجله

نتایج حاصله از دو قضیه بالا و با توجه به‌شرایط ونمادگذاری‌های قضیهٔ ۱، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} E\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \qquad (6)$$

حالا، اثبات احتمالی فرمول استرلینگ به شرح ذیل صورت می‌پذیرد. فرض کنید $X_1, X_2, ...$ متغیرهای تصادف مستقل و دارای توزیع نمایی با پارامتر ۱ باشند. اگر تعریف کنیم؛

$$Y_i = X_i - 1, \qquad i = 1, 2, ...,$$

آن‌گاه $Y_1, Y_2, ...$ متغیرهایی مستقل هستند و $E(Y_1) = 0$ و $E(Y_1^2) = 1$ ازاین رو، با توجه به‌رابطهٔ (٦)، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} E\frac{|Y_1 + Y_2 + ... + Y_n|}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \qquad (7)$$

از آنجاکه $Y_1 + Y_2 + ... + Y_n = X_1 + X_2 + ... + X_n - n$ اگر درنظر بگریم ؛ $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n - n$ ، آن‌گاه رابطهٔ(۷)را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\lim_{n\to\infty} E\frac{|S_n - n|}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

یا به‌طور معادل

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi} E\frac{|S_n - n|}{\sqrt{n}} = 2 \qquad (8)$$

اکنون $E\frac{|S_n - n|}{\sqrt{n}}$ را ارزیابی می‌کنیم.

ازآن‌جاکه X_i ها $(i = 1, 2, ..., n)$ دارای توزیع نمایی با پارامتر۱ هستند، بنابراین S_n دارای توزیع گاما $Gama(n,1)$ است و تابع کثافت آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f_{S_n}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-t}, \qquad t > 0.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}E\frac{|S_n-n|}{\sqrt{n}}&=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}\Gamma(n)}\int_0^\infty |S_n-n|t^{n-1}e^{-t}dt\\&=\frac{\sqrt{2n\pi}}{\Gamma(n)}\int_0^\infty\left|\frac{t}{n}-1\right|t^{n-1}e^{-t}dt\\&=\frac{\sqrt{2n\pi}}{\Gamma(n)}\left[\int_0^n\left|\frac{t}{n}-1\right|t^{n-1}e^{-t}dt+\int_n^\infty\left|\frac{t}{n}-1\right|t^{n-1}e^{-t}dt\right].\end{aligned}$$

با فرض $\frac{t}{n}=u$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}E\frac{|S_n-n|}{\sqrt{n}}&=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}\Gamma(n)}\left[\int_0^1(1-u)\,\mathrm{u}^{n-1}\,e^{-nu}du+\int_1^\infty(1-u)\,\mathrm{u}^{n-1}\,e^{-nu}du\right]\\&=\frac{n^n\sqrt{2n\pi}}{\Gamma(n)}\left[\int_0^1u^{n-1}e^{-nu}du-\int_0^1u^ne^{-u}du+\int_1^\infty u^{n-1}e^{-nu}du\right].\end{aligned}$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به‌جزء به‌تساوی زیر دست می‌یابیم:

$$\sqrt{2\pi}E\frac{|S_n-n|}{\sqrt{n}}=\frac{n^n\sqrt{2n\pi}}{\Gamma(n)}\left[\left.\frac{u^ne^{-nu}}{n}\right|_0^1-\left.\frac{u^ne^{-nu}}{n}\right|_1^\infty\right]=\frac{2\sqrt{2n\pi}n^ne^{-n}}{\Gamma(n+1)}.$$

ازاین رو، با به‌کارگیری رابطهٔ (۸) داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n\pi}n^ne^{-n}}{\Gamma(n+1)}=1$$

که همان فرمول استرلینگ است.

نتیجه‌گیری

محاسبه فکتوریل‌های اعداد بزرگ به‌روش‌های عددی بعضاً خیلی مشکل و یاهم در مواردی ناممکن است، از این رو برای حل تقربی آن‌ها فرمول‌های مختلف وجود دارد که از آن جمله فرمول استرلینگ است که آن‌را به‌روش توزیع گاما و توزیع نمایی به‌بررسی گرفتیم که هردو روش خیلی جالب و در خور توجه است، در این مقاله به بررسی روش‌های اثبات احتمالی فرمول استرلینگ با استفاده از توزیع گا ما و نمایی پرداخته ایم؛ با اینکه سطح محاسبات در روش توزیع گاما نسبت به‌روش توزیع نمایی کمتر است ولی نتایج حاصل از هردو روش قناعت بخش است. روش اول که اثبات به‌طریقه توزیع گاما است به دلیل اینکه توزیع گاما دارای دو پارامتر است و لی محاسبه کمتری دارد نسبت به روش نمایی پیچیده نیست و مشکل به‌نظر نمی‌رسد، اما روش نمایی به‌دلیل داشتن یک پارا متر بسیار ساده اما نسبت به‌روش توزیع گاما دارای محاسبات طولانی‌تر است.

مجله علمی تحقیقی پامیر - دپامیر علمی څېړنیزه مجله - Pamir Academic & Research Journal

منابع

بلیتز اشتاین، جوزیف و هوانگ، جسیکا.(۱۴۰۲). مقدمه‌ای بر احتمال. مترجم نورالدین فخری. بدخشان: انتشارات پوهنتون بدخشان. ص ۱۷۰-۱۷۱.

بهبودیان، جواد. (۱۳۷۵). جیمز استرلینگ و فرمول تقریبی او برای n!. اندیشه آماری. ۱ (۲): ص ۳۵.

بهبودیان، جواد. (۱۳۸٤). آمار و احتمال مقدماتی. تهران: انتشارات استان قدس رضوی.

عمیدی،علی.(۱۳۷٤). احتمال و کاربردهای آن. تهران: انتشارات پیام نور.

قهرمانی، سعید.(۱۳۹۷). مبانی احتمال. ترجمه:غلام حسین شاه‌کار، ابوالقاسم بزرگنیا. تهران: نشر دانشگاه صنعتی شریف.

Bhattacharjee, D. and Mukhopadhyay, N. (۲۰۱۰). Stirling’s Formula and Its Extensions: Heuristic Approaches, Communications in Statistics-Theory and Methods, ۳۹(٦), ۱۰٤٦- ۱۰٥۳.

Dudley, R. M. (۲۰۰٤). Real analysis and probability. Cambridge: Cambridge University Press,.

Dutka, J. (۱۹۹۱), The early history of the factorial function, Archive for History of Exact Sciences, ٤۳ (۳), ۲۲٥–۲٤۹.

Frenzen, C. (۱۹۹٥). A new elementary proof of Stirling’s formula, Mathematics Magazine, ٦۸(۱), ٥٥-٥۸

Holliday, J. (۱۷٤۹). The Differential Method: A Treatise of the Summation and Interpolation of Infinite Series.

Hu, T.-C. (۱۹۸۸). A statistical method of approach to Stirling’s formula, The American Statistician, ٤۲(۳), ۲۰٤–۲۰٥.

Khan, R. A. (۲۰۱۳). A probabilistic proof of Stirling’s formula, The American Mathematical Monthly, ۸۱(٤), ۳٦٦-۳٦۹.

Lou, H. (۲۰۱٤). A short proof of Stirling’s formula, The American Mathematical Monthly, ۱۲۱(۲), ۱٥٤-۱٥۷.

Neuschel, T. (۲۰۱٤). A new proof of Stirling’s formula, The American Mathematical Monthly, ۱۲۱(٤), ۳٥۰-۳٥۲.

Patin, J. M. (۱۹۸۹). A very short proof of Stirling’s formula, The American Mathematical Monthly, ۹٦(۱), ٤۱-٤۲.

Stirling, J. (۱۷۳۰). Methods Differential’s, sive Tractates de Summation et Interpolation Srierum Infinitarium. London. English translation by

Walsh, D. P. (۱۹۹٥). Equating Poisson and Normal probability functions to derive Stirling’s formula, The American Statistician, ٤۹(۳), ۲۷۰–۲۷۱.