کاربرد معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول قابل تفکیک در اقتصاد

نویسنده: **پوهنمل معراج الدین راسخ**
دیپارتمنت ریاضی، پوهنحی تعلیم و تربیه، پوهنتون بدخشان، فیض‌آباد، افغانستان
نشان برقی: Meraj۲۰۲۲edu@gmail.com
نشانه ارکاید: ۰۰۰۹-۰۰۰۵-۷۶۹۷-۸۶۶۷

چکیده

در این مقاله کاربردهای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول مودر مطالعه قرار می‌گرد. برای این منظور، ابتدا معادلات دیفرانسیل معمولی قابل تفکیک مرتبه اول که از آن‌ها در تحلیل و تجزیه مسائل اقتصادی استفاده می‌شوند؛ ارایه خواهیم نمود. از طرفی معادلات دیفرانسل به‌عنوان ابزار قوی در حل بسیاری از مسائل رشته‌های گوناگون دانش بشری مانند: فزیک، شیمی، و اقتصاد استفاده می‌شود. در حل و برسی معادلات دیفرانسیل از مفاهیم حساب دیفرانسل و انتگرال استفاده می‌شود. معادلات دیفرانسیل در تمام شاخه‌های علم اقتصاد نقش مهم و اساسی را ایفا می‌کند، امرزوه کمتر اقتصاد دانی وجود دارد که بتواند خود را از کاربرد معادلات دیفرانسیل در تشریح مباحث و مسائل اقتصادی و به خصوص موضوعات نظری اقتصادی بی‌نیاز بداند. تحقیق حاضر به‌منظور(کاربرد معادلات دیفرانیسل قابل تفکیک مرتبه اول معمولی در اقتصاد) به تحقیق گرفته شده است. در این تحقیق با توجه به هدف آن از نوع کاربردی وبر مبنای ماهیت از روش توصیفی براساس ماهیت اطلاعات از روش کتاب خانه‌ی استفاده می‌گردد. درنهایت دریافتیم که بعضی ازمسائل اقتصادی هستند که تحلیل و تجزیه آن‌ها بدون در نظر داشت معادلات دیفرانسیل مشکل و حتی ناممکن می‌باشد.

کلیدواژه‌ها: معادلات دیفرانسیل ، اقتصاد، قابل تفکیک، مرتبه اول معمولی.

Application of separable first order ordinary differential equations in economics

Author: **Merajuddin, Rsekh**
Badakhshan University, Education fuculty, mthematics department
E-Mail: Meraj۲۰۲۲edu@gmail.com
Orcid: https://orcid.org/۰۰۰۹-۰۰۰۵-۷۶۹۷-۸۶۶۷

Abstract

In this article, the applications of first order ordinary differential equations are discussed. For this purpose, we will first present first-order separable ordinary differential equations that are used in the analysis and analysis of economic problems. On the other hand, differential equations are used as a powerful tool in solving many problems in various fields of human knowledge such as: physics, chemistry, and economics. The concepts of differential and integral calculus are used in solving differential equations. Differential equations role an important and fundamental role in all branches of economics, nowadays there are few economists who can consider themselves unnecessary from the use of differential equations in describing economic issues, especially economic theoretical issues. . The current research has been carried out for the purpose of (the application of ordinary first-order separable differential equations in economics), in this research, according to its purpose, the applied type is used based on the nature of the descriptive method based on the nature of the information, the library method is used. Finally, we found that there are some economic problems that are difficult and even impossible to analyze without considering differential equations.

Keyword: Differential Equations, Economic, separable, first-order

مقدمه

ریاضی اقتصادی در واقع ابزار ریاضی برای تحلیل مطالب و بیان تیوری‌های اقتصاد است. ریاضیات به‌عنوان منطق تفکر و اقتصاد به‌عنوان منطق علمی انتخاب هستند. ترکیب این دو یعنی اقتصاد ریاضی، تأثیر بسزایی در الگوسازی‌های مرتبط به‌انتخاب بهینه در اقتصاد داشته است. نیوتن برای بار اول موفق شد، تا ضابطه‌ی حرکت اجرام میخانیکی در خلا را با استفاده از معادلات تفاضلی بیان کند. از آن زمان تا اکنون، روز به‌روز بر اهمیت معادلات تفاضلی افزوده می‌شود. چرا که عملاً بسیاری از پدیده‌های علمی (فزیکی، کیمیاوی، جامعه شناسی و اقتصاد)را که ازاصل قطعیت پیروی می‌کنند، با استفاده از معادلات تفاضلی می‌توان بیان کرد. بر اساس این اصل اگر پدیده‌ی را بشناسیم، و اگر عوامل مؤثر در آن را نیز بدانیم، قادریم تا آینده‌ی آن پدیده را (حد اقل در مقطع زمانی کوتاه) پیش‌بینی کنیم. بر این اساس معادلات تفاضلی در بسیاری از زمینه‌های علم اقتصاد ظاهر میگردد. از بررسی یک تابع عرضه و تقاضا گرفته تا تحلیل جمعیت، پیش‌بینی رشد اقتصادی کشور و بسیاری از مسایل دیگر (خلیلی، ۱۳۹۱). برای معرفی موضوعات این مقاله درقدم اول به‌یک سلسله تعاریف و ضروریات ابتدایی معادلات تفاضلی و روش‌های حل معادلات تفاضلی به‌شیوه‌های مختلف از قبیل معادلات تفاضلی قابل تفکیک، معادلات تفاضلی متجانس ومعادلات دیفرانسیل خطی

می‌پردازیم. سپس کاربردهای اقتصادی معادلات تفاضلی را با الگو های اقتصادی بیان می کنیم (پورکاظمی، ۱۳۸۸).

تبیین مسأله

این مقاله تحت عنوان کاربردهای معادلات دیفرانسیل قابل تفکیک مرتبه اول دراقتصاد موردبررسی قرار می گیرد. برای این منظور، نخست به‌معرفی معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول می‌پردازیم که در بخش حل مسائل اقتصادی از آن‌ها استفاده می کنیم.

سوالات تحقیق

1. آیا از معادلات دیفرانسیل در حل مسائل اقتصادی استفاده می‌شود؟
2. نقش معادلات دیفرانسیل مرتبه اول معمولی در علم اقتصاد چشت؟
3. آیا در الگوهای اقتصادی از معادلات دیفرانسیل قابل تفکیک استفاده می‌شود؟

اهداف تحقیق

1. برسی معادلات دیفرانسیل معمولی قابل تفکیک مرتبه اول؛
2. کابرد معادلات دیفرانسیل معمولی قابل تفکیک مرتبه اول در اقتصاد.

پشینه‌ی تحقیق

معادلات دیفرانسیل معمولی، یک حوزه‌ی فعال درتحقیق تجزیه وتحلیل مسائل اقتصادی می‌باشد. نه تنها به‌عنوان برنامه کاربردی برای ایده‌های جدید، بل‌که در پیشرفت آن‌ها موثر است. معادلات دیفرانسل معمولی یکی از شاخه‌های ریاضی کاربردی است که ساحه‌ی استفاده وسیعی در علوم انسانی مانند اقتصاد، فزیک، شیمی و... دارد. این شاخه ریاضی کار بردی به‌صورت وسیع وگسترده توسط دانشمندان ریاضی مورد تحقیق قرار گرفته است. تحت این عنوان تا هنوز در نهادهای تحصیلی افغانستان کدام اثرِ علمی نوشته نشده است.

روش تحقیق

روش انجام تحقیق، بستگی به‌هدف ماهیت موضوع تحقیق و امکانات اجرایی آن دارد. با توجه به‌این هدف اساسی این تحقیق «کاربرد معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول قابل تفکیک دراقصتاد» است. از این رو از روش تحقیق توصیفی بهره گرفته شده است. آمار با استفاده از روش کتاب‌خانه‌ی از منابع دست اول مانند: کتاب‌ها، تیزیس‌ها، مقالات و منابع معتبر علمی جمع‌آوری گردیده است. دلیل استفاده از روش کتاب‌خانه‌ی این است که ماهیت عنوان این مقاله، وابسته به‌روش کتاب‌خانه‌ی است. هم‌چنان تمام معیارهای موازین قابل استفاده ازروش کتاب‌خانه‌ی در این مقاله رعایت گردیده است. هم‌چنان برای ترسیم

گراف‌ها وتایپ ریاضی از بعضی سافت‌ویرهای مخصوص ریاضی مانند: math type, Mathematica استفاده می‌شود.

اهمیت تحقیق

نظریه و معادلات دیفرانسیل معمولی، یک موضوع مهم در ریاضیات کاربردی است. معادلات دیفرانسیل به‌عنوان مدل‌های ریاضی برای برسی و تحلیل مسائل اقتصادی بکار می‌رود. معادلات دیفرانسیل هنگام فورمول بندی مجدد در باره مسائل در ریاضیات مطرح می‌شوند. هم‌چنان کار بردهای گوناگونی در بسیاری از حوزه‌ها، مانند مبکانیک پیوسته، نظریه‌ی پتانیسل، نظریه‌ی کنترل بهینه و اقتصاد دارد. بنا بر ین کاربردهای معادلات دیفرانسیل معمولی قابل تفیکک نوع اول؛ یک شاخه‌ی ضروری از تحقیقات علمی می‌باشد.

نتایج ویافته‌ها

در این بخش یک سلسله‌ی تعاریف که در این مقاله به‌آن‌ها نیاز داریم می‌پردازیم:

۱.تعریف: هر رابطه‌ی بین تابع و متغیر مستقل و مشتقات تابع نسبت به‌متغیر مستقل را یک معادله‌ی دیفرانسیل می‌نایم.

حل معادله دیفرانسیل

حل معادله دیفرانسیل عبار است از : یک تابع مشتق پذیر $y = \varphi(x)$ را گویند که اگر تابع مذکور با مشتقات مربوطه‌ی آن در معادله دیفرانسیل وضع شود؛ معادله را به‌عینیت تبدیل کند (ایوبی، ۱۳۹۱).

مثال: تابع $y = sin\ x$ حل معادله دیفرانسیل $y'' + y = ۰$ می‌باشد.

حل: از تابع داده شده، مشتق دوم را بررسی می‌کنیم.

$$y = sinx \Rightarrow y' = \cos x \Rightarrow y'' = -\sin x$$

پس مقادیر دریافت شده در معادله‌ی دیفرانسیل فوق وضع می‌کنیم، به‌عینیت تبدیل شود.

$$y'' + y = ۰ \Rightarrow -sinx + \sin x = ۰$$

انتگرا ل گیری معادله دیفرانسیل

پروسه‌ی دریافت حل معادله دیفرانسل را، به‌نام انتگرال گیری معادله‌ی دیفرانسیل یاد می‌کنند (صافی، ۱۳۹۶).

حل‌های معادله دیفرانسیل

حل عمومی: حل عمومی معادله دیفرانسیل ترتیب اول $y' = f(x,y)$ در ناحیه D مستوی xoy تابعی $y = \varphi(x,c)$ را نامند که دارایی خواص ذیل باشند.

حالت اول: این حل عبارت از معادله دیفرانسیل داده شده در صورتی قیمت‌های کیفی کمیت ثابت c بوده که مربوط به‌سیت کیفی عددی می‌باشد.

حالت دوم: برای شرایط اولیه $y(x_0) = y_0$ طوری $(x_0, y_0) \in D$ است، یگانه قیمت $c = c_0$ موجود شده می‌تواند با در نظر داشت آن حل $y = \varphi(x, c_0)$ شرایط داده شده اولیه را صدق نماید.

مسئله کوشی: مسئله که در آن در یافت حل خصوصی معادله دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ که شرایط اولیه $y(x_0) = y_0$ را صدق نماید به‌نام مسئله کوشی یادمی‌گردد (خلیلی، ۱۳۹۱).

طرح مسأله کوشی

در تخنیک‌های حل معادلات دیفرانسیل خیلی نا مطلوب بوده، بیش‌تر ضروت می‌افتد تایک حل مورد نظر معادله مذکور را به‌دست آریم. این روش یک مسأله مهم بوده، که ما آن‌را برای معادلات دیفرانسیل ترتیب اول $y' = f(x,y)$ بررسی می‌نماییم، که طرف راست آن یعنی، $y' = f(x,y)$ در ناحیه D مستوی xoy معین باشد. برای به دست آوردن یگانه حل $y = y(x)$ معادله $y' = f(x,y)$ برای معادله مذکور شرایطی را وضع می‌نماییم که حل معادله $y' = f(x,y)$ را صدق کند. این شرایط را به‌نام شرایط اولیه یاد می‌کنند. به‌این ترتیب به‌یکی از مسائل اساسی نظری و عملی معادلات دیفرانسیل که به نام مسأله کوشی یاد می‌شود روبرو می‌شویم. مسأله‌ی مذکور را برای اولین بار کوشی(ریاضیدان فرانسوی) تدوین وآن‌را حل کرد. این مسأله برای معادله دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ چنین مطرح می‌شود. حال $y = y(x)$ معادله دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ را در یافت کنید در صورتی که حل مذکور در شرایط اولیه $y(x_0) = y_0$ نقطه کیفی ساحه تعریف D تابع $f(x,y)$ می‌باشد. بنابر ین می‌توان نوشت که:

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \qquad (۲)$$

جواب غیر عادی(استثنایی)

اگر رابطه‌ی جواب یک معادله دیفرانسیل باشد، اما نتوان آن‌را با قیمت گذاری به‌پارامترها در جواب عمومی معادله دیفرانسیل به‌دست آورد؛ آن جواب را یک جواب استثنایی معادله دیفرانسیل می‌گویند (صافی، ۱۳۹۷).

توجه باید داشت که جواب غیر عادی مخصوص معادلات غیر خطی است، معادلات دیرانسیل خطی جواب غیر عادی ندارند.

مفهوم هندسی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

چون می‌دانیم که شکل عمومی معادلات دیفرانیسیل مرتبه اول $y' = f(x, y)$ است که حل عمومی تابعی $y = \varphi(x, c)$ می‌باشد، که در آن c یک ثابت کیفی است و می‌تواند قیمت‌های مختلف را اختیار کند. پس حل عمومی معادله فوق مجموع منحنی‌ها را بروی سیستم کمیات وضعیه ترسیم می‌کند. از نقطه نظر هندسی حل عمومی یا انتگرال عمومی در مستوی کمیات وضعیه مجموع منحنی‌ها را نشان می‌دهد؛ طوری‌که هریک از این منحنی‌ها ارتباط به‌یک ثابت کیفی c این مجموعه‌ها را به نام منحنی انتگرالی معادله دیفرانسیل یاد می‌کنند. انتگرال خصوصی یا حل خصوصی در اصل مطابقت به‌یکی از این منحنی‌ها نموده، طوری‌که از یک نقطه معین منحنی می‌گذرد (نکوکار، ۱۳۷۸).

مثال: مفهوم هندسی معادله دیفرانسیل ذیل را بررسی کنید.

$$y' = \frac{y}{x} \qquad (۳)$$

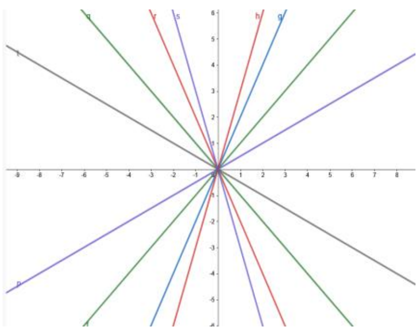
حل: نخست حل عمومی معادله فوق را بررسی و سپس جهت ساحه آن را ترسیم می‌کنیم.

$$y' = \frac{y}{x}, \ \Rightarrow \ \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \Rightarrow lny = \ln(cx)$$

پس حل عمومی معادله فوق قرار ذیل به‌دست می‌آید:

$$y = cx$$

برای مقادیر مختلف پارامتر c جهت ساحه قرار ذیل رسم می‌شود:

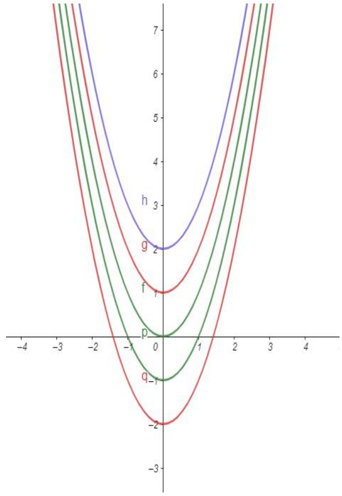


مثال: ازحل عمومی $y = x^{۲} + c$ معادله دیفرانسل مربوطه‌ی آن‌را تشکیل داده و منحنی آن‌را رسم کنید.

حل: از عمومی داده شده مشتق اول آن را می گریم.

$$y = x^{۲} + c \Rightarrow y' = ۲x$$

برا ی مقادیر مختلف پارا متر منحنی تابع طوری ذیل رسم می‌شود.

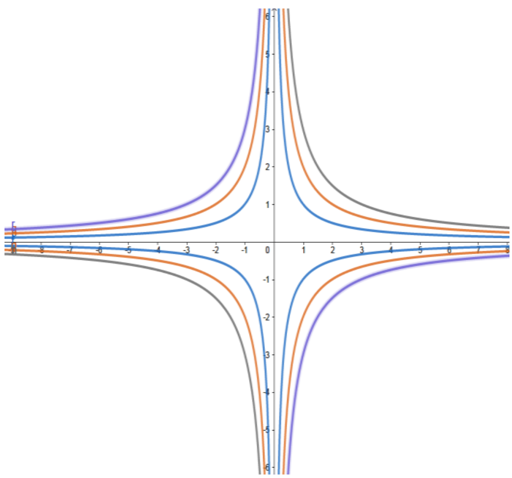


مثال: از حل عمومی $y = \frac{c}{x}$ معادله دیفرانسیل مربوطه آن راتشکیل داده منحنی آن‌را رسم کنید.

حل:

$$y = \frac{c}{x}, \ \Rightarrow y' = \frac{-c}{x^{۲}} \Rightarrow \ y' = \frac{-y}{x}$$

در برابر مقادیر مختلف پارامتر گراف طوری ذیل رسم می‌شود:



انواع معادلات دیفرانسیل

معادلات دیفرانیسل به‌صورت عموم به‌دو دسته تقسیم می‌شوند: معادلات دیفرانیسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل قسمی.

معادلات دیفرانسیل معمولی

تعریف: هرگاه در یک معادله دیفرانسیلی متشکل از یک متحول مانندx تابع مجهول $y = f(x$ ومشتقات تابع مجهول از ترتیب‌های مختلف تشکیل گردیده باشد؛ به‌نام معادله دیفرانسیل معمولی می‌نامند. وشکل عمومی آن قرار ذیل می‌باشد:

$$f\left(x, y, y'. y'', y''', \dots, y^{(n)}\right) = ۰ \qquad (٤)$$

معادله دیفرانسیل (٤) را می‌توان به‌شکل ذیل نوشت:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx} . \frac{d^۲y}{dx^۲}, \frac{d^۳y}{dx^۳}, \dots, \frac{d^{(n)}y}{dx^۳}\right) = ۰ \qquad (٥)$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

طوری‌که در قبل تذکر دادیم، شکل عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول $f(x, y, y')$=۰، می‌باشد. حال در این بخش می‌خواهیم جواب عمومی این نوع معادلات را به‌دست آریم. باید توجه داشت که حل یک معادله دیفرانسیل درحالت کلی امکان پذیر نیست. تنها معادلات دیفرانسیل خاص، هریکی از آن‌ها به روش‌های مخصوصی قابل حل هستند. به‌همین جهت در این بخش به‌حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خواهیم پرداخت.

معادلات دیفرانسیل با متحولین جدا شونده

معادلات دیفرانسیل با متحولین جدا شونده به‌چهار بخش تقسیم شده اندکه، هر کدام این نوع معادلات را قرارذیل برسی می کنیم.

معادلات دیفرانسیل قابل تفکیک نوع اول: شکل عمومی معادله دیفرانسیل قابل تفکیک نوع اول قرار ذیل است:

$$y' = f_۱(x) f_۲(x) \qquad (٦)$$

حل: متحول‌ها را در معادله‌ی فوق، جدا سازی می کنیم.

$$y' = f_۱(x) f_۲(x), \Rightarrow \frac{dy}{f_۲(y)} = \frac{dx}{f_۱(x)} \qquad (٧)$$

از رابطه فوق انتگرال می گریم، جواب عمومی معادله دیفرانسیل حاصل می‌شود.

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int \frac{dx}{f_1(x)} + c$$

معادله د یفرانسل قابل تفکیک نوع دوم: این نوع معادله دیفرانیسل دارای شکل عمومی ذیل می‌باشد:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (۸)$$

با انتگرال گیری از (۸)، حل عمومی معادله دیفرانسیل نوع دوم حاصل می‌شود.

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = \int 0, \Rightarrow \int M(x)dx + \int N(y)dy = 0$$

معادله دیفرانسیل قابل تفکیک نوع سوم: معادله دیفرانسیل قابل تفکیک نوع سوم به فرم ذیل نوشته می‌شود.

$$M_1(x).N_1(y)dx + M_2(x).N_2(y) \qquad (۹)$$

حل: متحول‌ها را جداسازی می‌کنیم.

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0 \qquad (۱۰)$$

با انتگرال گیری از (۱۰)، حل عمومی معادله دیفرانسیل نوع سوم به دست می‌آید.

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = \int 0 \qquad (۱۱)$$

پس داریم،

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = c \qquad (۱۲)$$

بعد از انتگرال‌گیری حل عمومی معادله دیفرانسل قابل تفکیک نوع سوم در فوق به‌دست آمده است.

معادلات دیفرانسیل متجانس ترتیب اول

تعریف: معادله دیفرانسیل ترتیب اول $y' = f(x, y)$، یک معادله متجانس نظر به‌متحول‌های x و y از ترتیب صفری یاد می‌گردد. در صورتی‌که تابع $f(x, y)$، یک تابع متجانس از ترتیب صفری نظر به‌متحول‌های x و y باشد.

روش حل معادله دیفرانسیل متجانس ترتیب اول

برای این‌که یک معادله دیفرانسیل متجانس ترتیب اول را به‌یک معادله دیفرانسیل قابل تفکیک تبدیل نماییم، در این صورت از تعویضی $\frac{y}{x} = u$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{y}{x} = y, \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = \frac{du}{dx}x + u$$

مقادیر در یافت شده را در اصل معادله دیفرانسیل $y' = f(\frac{y}{x}$، جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{du}{dx}x + u = f(u)$$

متحول‌ها را جدا سازی می‌کنیم

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \qquad (۱۳)$$

از طرفین۱۳، انتگرال می‌گریم، در نهایت حل عمومی معادله دیفرانسیل حاصل می‌شود.

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + \ln c$$

کاربرد معادلا ت دیفرانسیل مرتبه اول قابل تفکیک در اقتصاد

معادلات تفاضلی در بسیاری از توابع اقتصادی کاربرد دارند. این معادلات در تعین شرایط پایداری پویا برای تعادل بازار در مدل‌های اقتصاد خرد و نیز ردیابی مسیر زمانی تحت شرایط مختلف در اقتصاد کلان مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگر نرخ رشد یک تابع مفروض باشد، اقتصاد دانان قادر اند، با استفاده از معادلات دیفرانیسیل تابع مورد نظر را تعین کنند. هم‌چنین اگر کشش نقطه‌ی در دست باشد، می‌توان تابع تقاضا را برآورد کرد. معادلات دیفرانسیل جهت برآورد توابع سرمایه از توابع سرمایه‌گذاری و هم‌چنین برآورد توابع هزینه کل و درآمد کل از توابع هزینه‌ی نهایی و در آمد نهایی مورد استفاده قرار می‌گیرد (کاظمی، ۱۳۸۶).

در این‌جا به‌کاربرد های مختلف از معادلات در بخش‌های مختلف اقتصاد پرداخته‌ایم. گرچه ممکن است از یک راه حل در برخی کاربردها استفاده شده باشد، هدف از آوردن کاربردهای مختلف بیان اهمیت معادلات تفاضلی و میزان استفاده از آن در اقتصاد می‌باشد.

تابع در آمد

تولید کننده A را به‌اندازه x تولید می‌کند. تابع تقاضا برای این تولید کننده $y = D(x)$ است که در آن y قیمت است و مقدار فروش، که آن را درآمدکل می‌نامیم.

$$TR = x.y = x.D(x) \qquad (۱٤)$$

در حالت کلی.TR است، منحنی در آمد از مبدأ می‌گذرد. درآمد متوسط در واقع در آمد حاصل از فروش، یک واحد است که به‌نام تابع تقاضا نامند.

$$AR = \frac{FR}{x} = \frac{x.D(x)}{x} = D(x) \qquad (۱۵)$$

درآمد نهایی با مشتق تابع در آمد کل برابر است. $MR = \frac{DTR}{dx}$ که درآن MR نرخ تغییر درآمد کل است. یعنی، اگر مقدار تقاضا یک واحد تغییر کند، در آمد کل به‌اندازه MR تغییر می‌کند (کاظمی، ۱۳۸۸).

مجله علمی تحقیقی پامیر - دپامیر علمی څېړنیزه مجله - Pamir Academic & Research Journal

برای دریافت در آمد کل، از معادله دیفرانسیل قابل تفکیک استفاده می کنیم.

$$MR = \frac{DTR}{dx} \Rightarrow DTR = MR.dx \Rightarrow \int DTR = \int MR.dx$$

برای تعین یک تابع درآمد کل، یک شرط اولیه لازم است، که در بسیاری حالت‌ها در آمد کل به $x = ۰$ برابر است یعنی، $TR. = ۰$.

مثال: اگر تابع درآمد نهایی به صورت $MR = ۱ + ۲x - x^۲$ با در در نظرداشت شرایط اولیه $c = ۰$، تابع در آمد کل و تابع تقاضا را دریافت کنید.

حل: با استفاده از فورمول $MR = \frac{dTR}{dx}$ می‌توان نوشت:

$$MR = \frac{dTR}{dx} \Rightarrow ۱ + ۲x - x^۲ = \frac{dTR}{dx} \Rightarrow dTR = (۱ + ۲x - x^۲)dx$$

از رابطه‌ی بالا انتگرال می گریم.

$$\int dTR = \int (۱ + ۲x - x^۲)dx \Rightarrow TR = x + x^۲ - \frac{۱}{۳}x^۳ + c$$

چون $c = ۰$ است، پس تابع در آمد کل قرار ذیل است.

$$TR = x + x^۲ - \frac{۱}{۳}x^۳$$

پس داریم:

$$TR = x.y \Rightarrow x + x^۲ - \frac{۱}{۳}x^۳ = x.y \Rightarrow y = ۱ + x - \frac{۱}{۳}x^۲$$

در آمد نهای نبست بهx

$$MR_x = \frac{\partial RT}{\partial x} \qquad (۱٦)$$

در آمد نهایی نسبت به y

$$MR_y = \frac{\partial RT}{\partial y} \qquad (۱۷)$$

هرگاه در آمد نهایی نسبت به x داده شده باشد، تابع در آمد قرار ذیل دریافت می گردد:

$$MR_x = \frac{\partial RT}{\partial x} \Rightarrow \partial RT = MR_x dx \qquad (۱۸)$$

با انتگرال گیر ی از (۱۸) داریم:

$$\int \partial RT = \int MR_x dx \Rightarrow RT = \int MR_x dx \qquad (۱۹)$$

در صورتی که درآمد نهای نسبت به y داده شده باشد، تابع در آمد قرار ذیل حاصل می‌شود:

$$\int \partial RT = \int MR_y dy \;\Rightarrow\; RT = \int M y dy \qquad (۲۰)$$

تابع هزینه کل

در حالت کلی هزینه، از دو بخش ثابت و متغییر تشکیل شده است « هزینه‌ی ثابت» با تغییر سطح تولید ثابت می‌ماند و عموماً شامل هزینه‌های مانند: بهره، اجازه، استهلاک کارخانه و لوازم آن است. این هزینه را به FC نشان می‌دهیم.

«هزینه‌ی متغییر» با سطح تولید تغییر می‌کند و شامل پرداخت به‌نیروی کار، مواد اولیه وغیره می‌باشد. این هزینه را به VC نمایش می‌دهیم. TC هزینه کل تولید و بازاریابی x واحد از یک کالا باشد و فرض شود که تنها تابعی از x است. معادله قرار ذیل است: (ژانگ، ۲۰۲۲).

$$TC = FC + VC \qquad (۲۱)$$

در حالت کلی منحنی هزینه‌ی کل دارای خواص زیر است:

۱. اگر تولید صفر شود، هزینه‌ی کل صفر یا مثبت است، یعنی داریم $\boldsymbol{TC(0) \geq 0}$، در این صورت مقدار $\boldsymbol{TC(0)}$، هزینه ثابت تولید است؛

۲. هزینه‌ی کل با افزایش مقدار تولید $\boldsymbol{x}$ تزاید می‌کند بنابر ین $\boldsymbol{TC'(x) > 0}$ همواره مثبت است؛

۳. هزینه‌ی کل تولید بر علاوه مقادیر زیادی از تولید هر کالا به‌نقطه‌ی می‌رسد که از آن به‌بعد با نرخ صعودی افزایش می‌یابد؛ از این رو تقعر منحنی هزینه به‌سمت بالا است. یعنی $\boldsymbol{TC'(x)}$

هزینه‌ی متوسط

فورمول هزینه‌ی متوسط به‌شکل ذیل است:

$$AC = \frac{TC}{x} \qquad (۲۲)$$

در(۱۶)، MC نرخ تغییر هزینه‌ی کل است، اگر مقدار تولید یک واحد تغییر کند، هزینه‌ی که به‌اندازه MC تغییر می‌کند. واضح است که با داشتن هزینه‌ی نهایی، می‌توانیم که هزینه‌ی کل را با استفاده از معادله دیفرانسیل و روش‌های انتگرال گیری به دست آریم.

$$MC = \frac{dTC}{dx} \Rightarrow dTC = MCdx \Rightarrow \int dTC = \int MCdx \Rightarrow TC = \int MCdx$$

مجله علمی تحقیقی پامیر - دپامیر علمی څېړنیزه مجله - Pamir Academic & Research Journal

مثال: اگرتابع هزینه‌ی نهایی $MC = ۲x + ۶$، هزینه ثابت$FC = ۱۰۰$، باشد، هزینه‌ی کل را در صورتی دریابید که $x = ۵$ باشد.

حل: با استفاده از فورمول ذیل حل می‌نماییم:

$$MC = \frac{dTC}{dx} \Rightarrow dTC = MCdx \Rightarrow \int dTC = \int (۲x + ۶)dx = x^۲ + ۶x + c$$

پس داریم:

$$TC = x^۲ + ۶x + c, x = ۵ \qquad (۲۳)$$

اگر شرایط اولیه را تطبیق نماییم $c = ۱۰۰$ حاصل می‌شود.

مقدارc را در (۲۳) جایگزین می کنیم.

$$TC = x^۲ + ۶x + ۱۰۰ \qquad (۲۴)$$

درآمد ملی، مصرف ملی و پس انداز ملی

فرض می کنیم که تابع مصرف ملی به‌شکل $C = f(x)$، که در آن C مصرف ملی و x در آمد ملی است. در این صورت میل نهایی به‌مصرف MPC، برا بر به‌مشتق مصرف، نسبت به x می‌باشد(باکاری، ۲۰۱۸).

$$MPC = \frac{dC}{dx} = f'(x) \qquad (۲۵)$$

اگر S، پس انداز ملی باشد، در این صورت،

$$x = C + C \qquad (۲۶)$$

از رابطه‌ی بالا مشتق می گریم:

$$\frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx} = ۱ \qquad (۲۷)$$

ویا

$$MPC + MPC = ۱$$

در (۲۰) ، $(\frac{dC}{x}$، موسوم به میل نهایی مصرف و$\frac{dS}{dx}$، میل نهایی پس انداز است. با معلوم بودن میل نهایی و یا پس انداز، با استفاده از معادله دیفرانسیل می‌توان تابع مصرف یا پس انداز را تعیین کرد. اگر (۲۰) $\frac{dC}{dx}$، معلوم باشد، در این صورت داریم:

$$\frac{dC}{dx} = f'(x) \Rightarrow dC = f'(x)dx$$

از رابطه‌ی بالا انتگرال می گریم:

$$\int dC = \int f'(x)dx \Rightarrow c = f(x)$$

با معلوم بودن شرایط اولیه، می‌توان ثابت c را تعیین کرد، با معلوم بودن تابع مصرف ملی می‌توان پس انداز ملی را تعیین کرد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، کاربرد معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول قابل تفکیک در اقتصاد مورد مطالعه قرار گرفته است. نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل بهترین و عمومی‌ترین نظریه‌ی ریاضی است، که به‌وسیله آن بسیاری از قوانین طبیعی و اقتصادی را می‌توان بیان و توضیح داد. این نظریه، شاخه‌ی از آنالیز ریاضی می‌باشد. در این تحقیق، در قدم نخست مفاهیم و تعریفاتی‌که از آن‌ها در تحلیل و تجزیه مسائل اقتصادی استفاده می‌شوند ارایه گردیده است. سپس با استفاده از معادلات دیفرانسیل معمولی قابل تفکیک مرتبه اول تابع درآمد، تابع هزینه کل، هزینه متوسط، در آمد ملی، مصرف ملی و پس انداز ملی با ارایه مثال‌های عددی بیان شده است. مسایل اقتصادی را با در نظرداشت قوانین آن به‌یک مدل ریاضی(معادلات دیفرانسل) است تبدیل کرده، سپس با استفاده از قوانین انتگرال‌گیری معادله دیفرانسیل مربوطه آن حل گردیده است. این موضوع را می‌توان در بخش‌های فزیک، کیمیا و مهندسی تعمیم داد.

منابع

اعظم صافی، عبدالولی. (۱۳۹۶). معادلات دیفرانسبل معمولی. انتشارات سعید.

ایوبی، توفیق اللّه. (۱۳۹۸). معادلات تفاضلی معمولی. انتشارات سعید.

خلیلی، عبد الوکیل. (۱۳۹۱). معادلات دیفرانسیل. انتشارات سعید.

غوری، محمد انوری. (۱۳۹۱). ریاضیات عالی. اتشارات سعید.

کاظمی، محمد حسین پور. (۱۳۸۶). معادلات دیفرانسیل و کابردهای آن در مهندسی و علوم اقصتادی. انتشارات نی.

کاظمی، محمد حسین پور. (۱۳۸۸). ریاضی عمومی و کاربرد آن در مدیریت. انشتارات نی.

نیکوکار، مسعود. (۱۳۸۸). حل مسایل معادلات دیفرانسیل. انتشارات آزاده.

نیکوکار، مسعود. (۱۳۸۹). معادلات دیفرانسل. انتشارات آزاده.

Asnor, A. I., Mohd Yatim, S. A., & Ibrahim, Z. B. (۲۰۱۹). Solving directly higher order ordinary differential equations by using variable order block backward differentiation formulae. Symmetry, ۱۱(۱۰), ۱۲۸۹.

Bakari, A., Skwame, I. Y., & Kumleng, G. M. (۲۰۱۸). An Application of Second Derivative Backward Differentiation Formula Hybrid Block Method on Stiff Ordinary Differential Equations. Journal of Natural Sciences Research, ۸, ۲۷-۳٦.

Cesari, L. (۲۰۱۲). Optimization—theory and applications: problems with ordinary differential equations (Vol. ۱۷). Springer Science & Business Media.

Hale, J. K. (۲۰۰۹). Ordinary differential equations. Courier Corporation.

Hartman, P. (۲۰۰۲). Ordinary differential equations. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Roberts, C. (۲۰۱۱). Ordinary differential equations: applications, models, and computing. CRC Press.

Zhang, H., & Zhao, W. (۲۰۲۲). A memory-efficient neural ordinary differential equation framework based on high-level adjoint differentiation. IEEE Transactions on Artificial Intelligence

Pamir Academic & Research Journal - مجله علمی تحقیقی پامیر - دپامیر علمی څېړنیزه مجله